2. cvičení - Matematická indukce, výroky, infima a suprema

👻 = příklady, co byste fakt fakt měli udělat, prosím prosím

Příklad 1 (Matematická indukce)**.** Dokažte následující tvrzení:

(a) Pro $n \in \mathbb{N}$ a $q \neq 1$ platí: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

(b) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

(c) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

(d) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(e) 👻 Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $5^n - 1$ dělitelné čtyřmi.

(f) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

(g) Pro $n \in \mathbb{N}$ platí: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(h) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ pro $n \geq 2$

Příklad 2. Tabulkovou metodou dokažte, že následující výroky jsou tatuologie.

(a) $\neg(\neg A) \iff A$ (Zákon dvojí negace)

(b) 👻 $(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A)$ (Princip obměny)

(c) $A \vee (\neg A)$ (Princip vyloučení třetího)

(d) $\neg(A \implies B) \iff (A \wedge \neg B)$ (negace implikace)

(e) $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ (alternativa implikace)

(f) 👻 $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$ (tranzitivita implikace)

Příklad 3. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků a znegujte je.

(a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\colon z > x \implies z > y$

(b) 👻 $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y \geq 0 \implies x + y \geq 0$

(c) 👻 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

(d) 👻 $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists y \in \mathbb{R}\colon x \cdot y = 1$

(e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Q}\colon y \leq x \wedge x < y + 1$

(f) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{N}\colon y \leq x \wedge x < y + 1$

Příklad 4. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme nyní následující výrokové formy:

- $S(m, z)$: Muž m je manželem ženy z.
- $L_1(m, z)$: Muž m miluje ženu z.
- $L_2(m, z)$: Žena z miluje muže m.

Zapište následující výroky pomocí kvantifikátorů, logických spojek a právě definovaných výrokových forem.

(a) Každý ženatý muž miluje svou manželku.

(b) Každou ženu miluje nějaký muž.

(c) Každý muž má nejvýše jednu manželku.

(d) Existuje vdaná žena.

(e) Existuje manželka, která miluje jiného muže, než svého manžela.

Následující výroky přeložte do češtiny:

(f) $\exists m \in M \ \forall z \in Z : \neg S(m, z)$

(g) $\exists z \in Z \ \forall m \in M : L_1(m, z) \implies \neg L_2(m, z)$

(h) $\exists z \in Z \ \forall m \in M : L_2(m, z) \implies \neg L_1(m, z)$

Příklad 5. Nechť X, A, B jsou libovolné množiny. Dokažte následující výroky.

(a) $\emptyset \subseteq A$

(b) $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$

(c) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$

(d) $(A \cap B = A) \iff A \subseteq B$

(e) $X \cup (A \cup B) = (X \cup A) \cup B$

(f) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Příklad 6. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

(a) $A = \{5, 6\}$

(b) $B = [-2, 5)$

(c) $C = \{q \in \mathbb{Q} \colon q^2 \leq 2\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 0\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R} \colon x \sin x < 1\}$

Příklad 7. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

(a) $A = \{\frac{p}{p+q} : p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$

(b) $B = \{\sin x : x \in (0, \pi)\}$

(c) $C = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{n^2 - m^2 : n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$

(e) $E = \{2^{-n} + 3^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$

Příklad 8. Určete infima a suprema následujících množin. Rozhodněte o (ne)existenci jejich maxim a minim.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} \colon x^4 < 16\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 + 2x \leq 1\}$

(c) $C = \{(-1)^n + \frac{1}{1+n} \colon n \in \mathbb{N}\}$

(d) $D = \{1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \colon n \in \mathbb{N}\}$

(e) $E = \{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \colon n \in \mathbb{N}\}$